Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

CLASA A VII-A

SUBIECTUL I

Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, ale căror laturi verifică relația:
$\sqrt{a^2-6\sqrt{2}a+27}+\sqrt{b^2-6\sqrt{6}b+90}+\sqrt{c^2-12\sqrt{2}c+121}\leq 16$

SUBIECTUL II

Se dau nuerele reale: A= $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+.......+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}$ și
B=$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+........+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$.

a) Calculați: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$;

b) Calculați media aritmetică a numerelor A și B;

c) Arătați că B $<$ 5.

SUBIECTUL III

Demonstrați că există n, număr natural nenul astfel încât ultimele 2017 cifre ale numărului 2017^n să fie 000...001 (2016 zerouri).

Gazeta Matematică

SUBIECTUL IV

Paralelogramul ABCD, de centru O, are AD= 30, BD= $6\sqrt{7}$ și sin($\widehat{BAD}$)= 0,2.

a) Calculați perimetrul , aria paralelogramului și lungimea diagonalei AC;

b) Dacă M e mijlocul lui (CD), iar $\{N\}$ = BM ∩ AD, calculați perimetrul și aria patrulaterului BONC.

Subiecte propuse de prof. Ion Marcel Neferu, Drăgășani,
și prof. Marian Firicel, Calafat

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

a) Simplificați fractia: $\frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+9}$;

b) Arătați că pentru orice n, număr natural, numărul $\sqrt{A} \in$ **N,** unde $A=(n^4+4n^2+3)(n^4+4n^2+9)+9$

SUBIECTUL II

Pentru orice numere reale a și b definim ”operația”: $a*b = ab - 10(a+b) + 110$

a) Calculați 5*5 ;

b) Arătați că $\sqrt{19*16} \in$ **N ;**

c) Calculați 1*2*3*4*.......*2018.

SUBIECTUL III

Deteminați toate submulțimile de câte patru elemente, numere naturale consecutive, cu proprietatea: cubul celui mai mare număr dintre ele este egal cu suma cuburilor celorlalte trei numere .

Gazeta Matematică

SUBIECTUL IV

Piramida regulată PREDA, de vârf P, are toate muchiile congruente. Notăm cu O centrul bazei REDA.

a) Determinați măsura unghiului dreptelor MN și OR, unde M e mijlocul lui (PD), iar N e mijlocul lui (PA).

b) Dacă Q e un punct astfel încât QPED sa fie tetraedru regulat, calculați cos ($\widehat{AQR}$).

Subiecte propuse de prof, Ion Marcel Neferu, Drăgășani

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a IX-a (4 ore/s)

1. a). Sa se demonstreze inegalitatile:
$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{2\sqrt{xy}}, \forall\, x, y \in (0;\, +\infty)$ si $\frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right), \forall\, x, y \in (0;\, +\infty)$
b) Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Aratati ca
$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
G.M. Nr. 11/2013

2. a. Demonstrati ca $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x], (\forall)x \in R$.
b. Rezolvati ecuatia $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.
c. Daca n si k sunt numere naturale astfel incat $2^k \leq n < 2^{k+1}$, aratati ca
$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n.$$
***

3. In triunghiul ABC se considera punctele M, N, G si P astfel incat M mijlocul segmentului $[BC]$, G centrul de greutate al triunghiului ABC, $P \in (AB)$, $\overrightarrow{PM} \| \overrightarrow{GC}$, $N \in (AC)$, $\overrightarrow{PG} \| \overrightarrow{GN}$.
a) Aratati ca $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
b) Aratati ca $\overrightarrow{PG}=\frac{5}{12}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
c) Aratati ca $2AN=3NC$.

Prof. Dinu Daniel, Dragasani

4. Se considera ecuatia
$x^2-(5m+1)x+6m^2+m-2=0, m \in R$, x_1 si x_2 fiind solutiile ecuatiei.
a) Determinati $m \in R, m>0$, stiind ca $|x_1|$, 3 si $|x_2|$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
b) Fie $f: R \to R, f(m)=|x_1|+|x_2|, m \in R$. Calculati Imf.

Prof. Dinu Maria, Dragasani

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a IX-a (3 ore/s)

1. Sa se determine functia de gradul al doilea care are coeficientii a, b, c in progresie geometrica cu suma egala cu $-0,(7)$ si $f(x) = f\left(\frac{1}{3} - x\right), \forall x \in R$.

***

2. Pe latura CD a dreptunghiului ABCD se considera punctele P si Q astfel incat
$DP = PQ = QC$. Definim punctele R si S prin $2\cdot \overrightarrow{AR} = 3 \cdot \overrightarrow{AP}$, respectiv $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AR}$.
a) Demonstrati ca A, C si S sunt coliniare.
b) Aratati ca Q este centrul de greutate al triunghiului ARS.

***

3. Sa se rezolve ecuatia:

$$m|x-2| = 2018x - 1, m \in R.$$

Discutie dupa valorile parametrului real m.

Prof. Dinu Daniel, Dragasani

4. Fie functia $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$.
   a) Aratati ca $(\nexists)x \in R$ astfel incat $f(x) = 7$.
   b) Aratati ca $(\exists)x \in R$ astfel incat $f(x) = 1$.
   c) Determinati imaginea functiei f.

Prof. Diaconescu-Armasescu Claudia, Rm. Valcea

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a X-a (4 ore/s)

1. a) Rezolvati in C ecuatia $z^3 = \bar{z}$.

b).Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel incat $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ si $|z_k| = 1, \forall k = \overline{1,3}$.
Calculati $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

***

2. Rezolvati ecuatiile:

a) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0;$

b) $3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)} = 0.$

Prof. Neacsu Steluta, Calimanesti

3. Demonstrati ca:

a) $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \sqrt{ab}\,,\ \forall\, a, b > 1$

b) $\log_x \frac{y^2+z^2}{y+z} + \log_y \frac{z^2+x^2}{z+x} + \log_z \frac{x^2+y^2}{x+y} \geq 3,\ \forall\, x, y, z > 1.$

***

4. Se considera dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}} + \frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$.

a) Sa se determine $n \in \mathbb{N}$ stiind ca numerele C_n^0, $\frac{1}{2}C_n^1$ si $\frac{1}{4}C_n^2$ sunt in progresie aritmetica.

b) Pentru n=8 sa se determine $x \in \mathbb{R}$, daca diferenta dintre termenul al saselea si termenul al patrulea este 56.

***

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a X-a (3 ore/s)

1. Fie $a = \sqrt[3]{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}} + \sqrt[3]{\sqrt{2017}-\sqrt{2018}}$.
   a) Aratati ca $a^3 + 3a \in R\backslash Q$.
   b) Aratati ca $\log_{2017}\frac{a^3+3a}{2} + \log_a\left(\frac{2\sqrt{2017}}{a} - 3\right) \in Q$.

Prof. Diaconescu-Armasescu Claudia, Rm. Valcea

2. Sa se determine $n \in N$, stiind ca raportul dintre termenul al saptelea al dezvoltarii $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ si termenul al saptelea de la sfarsitul ei este egal cu 0, 1(6).

***

3. a) Să se simplifice fractia $\frac{a^6+b^6}{a^4-a^2b^2+b^4}$, unde a și b sunt numere naturale nenule.
   b) Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{(4+x)^2} + \sqrt[3]{(5-x)^2} = 3 + \sqrt[3]{(5-x)(4+x)}$.

Valentin Smarandache, Rm. Valcea

4. În mulțimea numerelor complexe, să se rezolve ecuația:
$z^3 - (2\sqrt{3}+3i)z^2 + (1+4\sqrt{3}i)z - 3i - 6\sqrt{3} = 0$, știind că admite rădăcini de forma $bi, b \in R$ si $z_1 + z_2 + z_3 = 2\sqrt{3} + 3i$.

***

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a XI-a M1

1. Fie $A \in M_{2}(\mathbf{R})$ și A^t matricea transpusă. Știind că $\det(A + A^t) = 8$ si $\det(A + 2A^t) = 27$, să se calculeze det A.

G.M. nr 11 / 2014

2. Se considera sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0;1)$ si $a_{n+1} = a_n{}^2 - a_n + 1, (\forall)\ n \geq 1$.

a) Demonstrati ca sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent si calculati $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) Calcul $\lim_{n\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)$.

***

3. Se considera matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix}$, unde a, b, c reprezinta lungimile laturilor unui triunghi ABC de arie S, iar h_a, h_b, h_c reprezinta lungimile inaltimilor triunghiului. Demonstrati ca $\det A \geq 0$. In ce conditii det A=0?

G.M. 12/2014 (Supliment)

4. Sa se calculeze $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[2018]{x^{2018} + 2x^{2017} + 2018} - \sqrt[2017]{x^{2017} - 2x + 1}\right)$

Prof. Dinu Daniel, Dragasani

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial "Preda Filofteia"
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a XI-a M2

1. Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 3x+1 & 0 & -4x \\ 0 & 1 & 0 \\ -6x & 0 & 8x+1 \end{pmatrix} \middle| x \in R \right\}$

a) Aratati ca $A(x) \cdot A(y) = A(x + y + 11xy), (\forall)\ x, y \in R$.

b) Determinati $x \in R$, stiind ca $A^3(x) \cdot A(2) = A(-1)$.

c) Determinati matricea $X \in M_{3,1}(R)$, stiind ca $A(3) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Prof. Chitu Florin, Dragasani

2. Se considera functia $f: R \to R, f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 9} - x$.

a) Determinati asimptotele la graficul functiei f.

b) Aratati ca ecuatia f(x)=m admite cel putin o solutie in $(0, +\infty\ )$, oricare ar fi $m \in (2; 3)$.

Prof. Smarandache Cristina, Rm. Valcea

3. Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel incat $|b - c| < a < b + c$. Consideram sistemul

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

a) Demonstrati ca sistemul are o unica solutie (x_0, y_0, z_0).

b) Aratati ca x_0, y_0, z_0 sunt numere reale cu modulul subunitar.

***

4. Fie $f: R\backslash\{1\} \to R, f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$.

a) Sa se determine a, b, c, stiind ca dreapta y=x+1este asimptota oblica spre $+\infty$ si P(2;7) se afla pe graficul functiei f.

b) Pentru $a = 1, b = 0, c = 3$, sa se determine punctele de extrem ale functiei f.

c) Demonstrati ca, pentru orice $a < 1$ si $b > 1$, are loc inegalitatea

$$f(a) - f(b) \leq -8.$$

Prof. Dinu Maria, Dragasani

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a XII-a M1

1. Fie polinomul $f = (X + a)^{2018} + (X - a)^{2018}, a \in R$.
a) Determinati restul impartirii lui f la polinomul $X^2 - a^2$.
b) Determinati radacinile polinomului f in cazul in care are cel putin o radacina reala.
c) Aratati ca pentru orice $a \in R$, $a \neq 0$, radacinile in C ale lui f au partea reala nula.

Prof. Predoana Tatiana, Rm. Valcea

2. Se considera multimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 + 1009x & x \\ 2018x & 1 + 2x \end{pmatrix} \middle| x \in R \setminus \left\{ \frac{-1}{1011} \right\} \right\}$
a) Aratati ca $A(x) \cdot A(y) \in G, (\forall)\ A(x), A(y) \in G$.
b) Calculati
$$A\left(\frac{-9}{9100}\right) \cdot A\left(\frac{-8}{8089}\right) \cdot A\left(\frac{-7}{7078}\right) \cdot \ldots \cdot A\left(\frac{-2}{2023}\right) \cdot A\left(\frac{-1}{1012}\right) \cdot A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(9).$$

Prof. Dinu Daniel, Dragasani

3. Fie $a < b$ si $I_n = \int_a^b (x - a)^n (b - x)^n dx$.
a) Aratati ca $I_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} (b - a)^{2n+1}, \forall\ n \in N^*$;
b) Calculati $\lim_{n \to \infty} (I_n)^{\frac{1}{n}}$.

***

4. a) Sa se calculeze $\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a \cos x}\, dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si $a > 0$.

G.M. 10/2014 (supliment)

b).Calculaţi $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{5^x + 1}\, dx$.

Prof . Constantinescu Dragos , Rm. Valcea

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!

Concursul Regional Memorial “Preda Filofteia”
Editia a XXIV-a
21 aprilie 2018

Clasa a XII-a M2

1. Fie polinomul $f=(X+i)^{2018}+(X-i)^{2018}\in \mathbb{C}[X]$, avand forma algebrica $f=a_{2018}X^{2018}+a_{2017}X^{2017}+a_{2016}X^{2016}+\dots+a_1X+a_0$.

a) Determinati restul impartirii lui f la polinomul X^2+1;
b) Aratati ca toti coeficientii polinomului f sunt numere rele;
c) Demonstrati ca toate radacinile polinomului f sunt numere reale.

Prof. Diaconescu-Armasescu Claudia, Rm. Valcea

2. Fie functia $f: R \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, f(x)=arctg x.

a) Calculati $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} f^2(x)dx$;
b) Calculati $\int_{-1}^1 x f^{2018}(x)dx$;
c) Aratati ca $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}^{2018} x\,dx < \frac{1}{2}$.

Prof. Dinu Maria, Dragasani

3. Fie $f:(0,+\infty)\to R$, $f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$ si $F:(0,+\infty)\to R$, $F(x)=e^x+x-\ln x$.

a) Aratati ca F este o primitiva a lui f;
b) Calculati $\int x(F(x)-x+\ln x)^{2018}dx$;
c) Sa se determine $m\in R$, stiind ca aria suprafetei cuprinsa intre graficul functiei f, axa OX si dreptele x=1, x=e este egala cu e^m-2.

Prof. Barbu Daniela, Calimanesti

4. Fie $GG=(-1;1)$ si legea $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$, $x,y\in G$.

a) Aratati ca legea $*$ este asociativa.
b) Aratati ca functia $f: G\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, verifica relatia
$$f(x*y)=f(x)\cdot f(y), \forall\, x,y\in G.$$
c) Calculati $\frac{1}{2\cdot 2^2-1}*\frac{1}{2\cdot 3^2-1}*\frac{1}{2\cdot 4^2-1}*\dots*\frac{1}{2\cdot 2018^2-1}$.

Prof. Dinu Maria, Dragasani

NOTĂ:
Toate subiectele sunt obligatorii!
Timp de lucru: 3 ore
SUCCES!